

Екзаменул уник де стат (ЕУС) ла математикэ

Варианта демонстративэ а материалелор де контрол ши мэсурэ (МКМ) пентру петречеря экзаменулуй уник де стат ын анул 2016 ла МАТЕМАТИКЭ

Експликацииле ла варианта демонстративэ а материалелор де контрол ши мэсурэ пентру Екзаменулуй Уник де Стат ла математикэ ын анул 2016 (нивел де профил)

Варианта демонстративэ есте менитэ пентру а презента о информации деспре структура материалелор де контрол ши мэсурэ виитоаре, нумэрул де ынсэрчинэрь, деспре форма лор ши нивелул дифичил.

Ынсэрчинэриле вариантэй демонстративе ну рефлектэ тоате ынтребэриле концинутулуй, каре ар путя фи интродусе ын материалеле де контрол ши мэсурэ ын анул 2016. Структура лукрэрий есте презентатэ прин спечификаре, яр нумэрул комплет де ынтребэрь — прин кодификаря концинутулуй де елементе ши черинце кэтре нивелул де прегэтире а абсолвенцилор организациилор де ынвэцэмынт пентру петречеря Екзаменулуй уник де стат ын 2016 ла математикэ.

Варианта есте алкэтуитэ дин доуэ пэрць ши концине 21 де ынсэрчинэрь.

Партя 1 концине 9 ынсэрчинэрь а нивелулуй де базэ дефичил.

Партя 2 концине 12 ынсэрчинэрь ла ун нивел май ыналт пентру а контрола нивелул профил де прегэтире ла математикэ.

Ынсэрчинэриле В1–В14 –ку ун рэспунс скурт ын форма унуй нумэр ынтрег сау фракцией зечимале фините.

Ынсэрчинэриле С1–С7 – ку ун рэспунс десфэшурат.

Резолваря коректэ а фиекарей ынсэрчинэрь В1-В14 се нотязэ ку ун бал.

Резолваря коректэ а фиекэрей ынсэрчинэрь С1, С2 ши С3 се нотязэ ку 2 балурь; С4 ши С5 — ку 3 балурь; С6 ши С7 — ку 4 балурь. Балул инициал максим пентру ындеплиниря лукрэрий ынтрежь е де 34 балурь.

Ындеплиниря коректэ а ну май пуцин де чинч ынсэрчинэрь а вариантэй МКМ кореспунде нивелулуй миним де прегэтире, каре афирмэ ынсуширя програмей школий медий (комплете) а ынвэцэмынтулуй де кэтре абсолвент.

Структура вариантэй МКМ адмите петречеря экзаменулуй атыт дупэ концинутул комплет а лукрэрий, кыт ши нумай а пэрций 1 пентру контролул ынсуширий нивелулуй де базэ.

Фиекэрей ынсэрчинэрь ку ун рэспунс десфэшурат, интродус дин варианта демонстративэ, се пропуне уна дин солуцииле посибиле. Критерииле де нотаре презентате не пермит сэ алкэтуим о ынкипуире деспре черинцеле резолвэрилор деплине ши коректе.

Варианта демонстративэ а МКМ, системул де нотаре, спечификул ши кодификаря вор ажута а дезволта стратегия прегэтирий кэтре ЕУС ла математикэ.

Инструкция ын деплиний лукрэрий Нивелул де профил

Лукраря де экзаминаре есте алкэтуитэ дин доуэ пэрць, ын каре сынт инклузе 21 де ынсэрчиэрь.

Партя 1 концине 9 ынсэрчинэрь ку концинут ла нивел де базэ ши рэспунс скурт.

Партя 2 концине 8 ынсэрчинэрь ку концинут ла нивел ридикат ши рэспунс скурт ши 4 ынсэрчинэрь ку концинут ла нивел ыналт ши рэспунс десфэшурат.

Пентру ындеплиниря лукрэрий се преведе 3 оре ши 55 минуте (235 минуте).

Рэспунсуриле ла ынсэрчинэриле 1–14 се ынскриу ын формэ де нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ. Нумереле ле ынскриець пе кымпуриле рэспунсурилор ын текстул лукрэрий, май пе урмэ ле тречець ын формуларул де рэспунсурь № 1.

МКМ

Формуларул

Рэспунсул: -0,8.

10	-	0	,	8																		
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Пентру ындеплиниря ынсэрчинэрилор С1–С7 е нечесар де а ынскрисе резолваря деплинэ ши рэспунсул ын формуларул де рэспунсурь № 2.

Тоате формулареле ЕУС се ындеплинеск ку чернялэ нягрэ апринсэ. Се адмите фолосиря токурилор ку жёлэ, капиларе ши стилоурь ку пенице.

Ла ындеплиниря сарчинилог се поате де фолосит макулаторул. Инскрипцииле дин макулатор ну се яу ын консидерацие ла апречиеря лукрэрий.

Балуриле, примите де думнявоастрэ пентру ындеплиниря ынсэрчинэрилор, се асумязэ.

Стэруици-вэ сэ ындеплиниць кыт май мулте ынсэрчинэрь ши се акумулаць кыт май мулте балурь.

Вэ дорим сукчес!

Партя 1

Рэспунсуриле ла ынсэрчинэриле В1-В10 е нечесар сэ фие сау нумэр ынтрег сау фракције зечималэ финитэ. Рэспунсул се приведе де скрие ын формуларул де рэспунсурь №1 ын партя дряптэ де нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините, ынчепынд ку прима пэтрэцикэ. Фиекаре цифрэ, семнул «минус» ши виргула де скрис ынтр-о пэтрэцикэ апарте ын формулар. Унитэциле де мэсурэ ну се скриу.

В1

Ын шкоалэ ынвацэ 800 де елевь, 30% динтре каре сынт дин класеле примаре. Динтре елевий класелор медий ши супериоаре 20% ынвацэ лимба жерманэ. Кыць елевь ай школий ынвацэ лимба жерманэ, дакэ ын шкоала примарэ лимба жерманэ ну се студиязэ?

Резолваря:

Ын шкоала примарэ ынвацэ $800 \cdot 0,3 = 240$ де елевь, деч ын класеле медий ши супериоаре ынвацэ $800 - 240 = 560$ де елевь. Ынсямнэ, кэ лимба жерманэ ын шкоалэ о студиязэ $560 \cdot 0,2 = 112$ елевь.

Рэспунс: 112.

сау

Импозитул пе венит конституе 13% дин salariu. Дупэ рецинеря импозитулуй пе венит Мария Константиновна а примит 9570 рубле. Кыте рубле алкэтуеште salariул Марией Константиновна?

Резолваря:

Фие кэ salariул Марией Константиновна конституе x рубле. Атунч

$$x - 0,13x = 9570 \Leftrightarrow 0,87x = 9570 \Leftrightarrow x = 9570 : 0,87 \Leftrightarrow x = 11000.$$

Деч salariул Марией Константиновней конституе 11 000 рубле.

Рэспунс: 11 000.

сау

Ын септембрие 1 кг. де поамэ коста 60 рубле, ын октомбрие поама с-а скумпит ку 25%, яр ын ноембрие ынкэ ку 20%. Кыте рубле коста 1 кг. де поамэ дупэ мэриря прецулуй ын ноембрие?

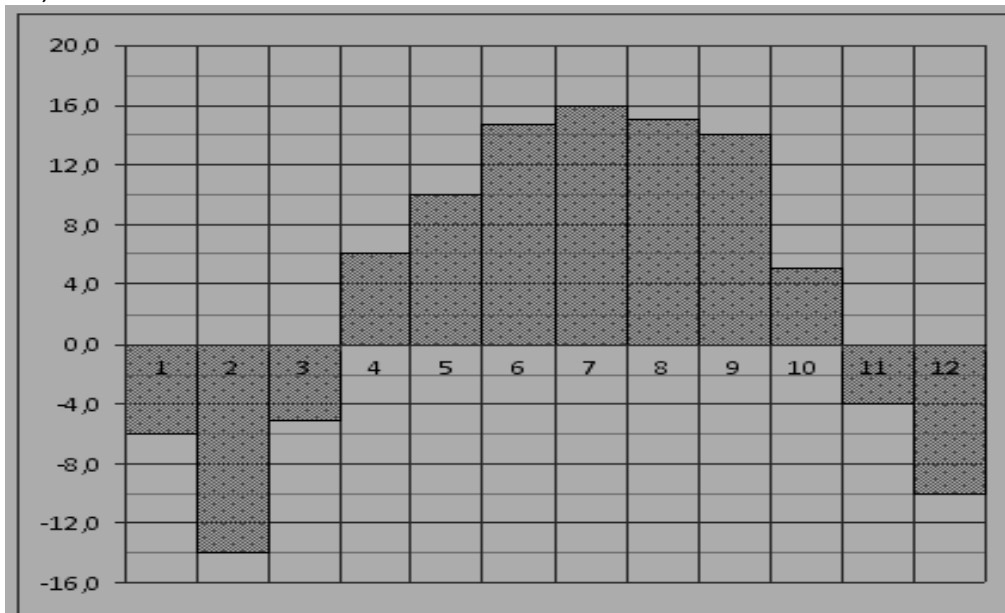
Резолваря:

Ын октомбрие поама с-а скумпит ку $60 \cdot 0,25 = 15$ рубле ши а девенит егал ку $60 + 15 = 75$ рубле. Ын ноембрие прецул поамей с-а мэрит ку $75 \cdot 0,2 = 15$ рубле. Деч дупэ мэриря прецулуй ын ноембрие 1 кг де поамэ а девенит егал ку $75 + 15 = 90$ рубле.

Рэспунс: 90.

В2

Пе диаграмэ есте арэтатэ температура медие лунарэ а аерулуй ын орашул Нижний Новгород (Горький) ын фиекаре лунэ а анулуй 1994. Пе оризонтал сынт фиксате лунеле, пе вертикал – температура ын граде Челсиус. Стабилиць дупэ диаграмэ, ын кыте лунь температура медие лунарэ ера май ыналтэ де 4 граде Челсиус.

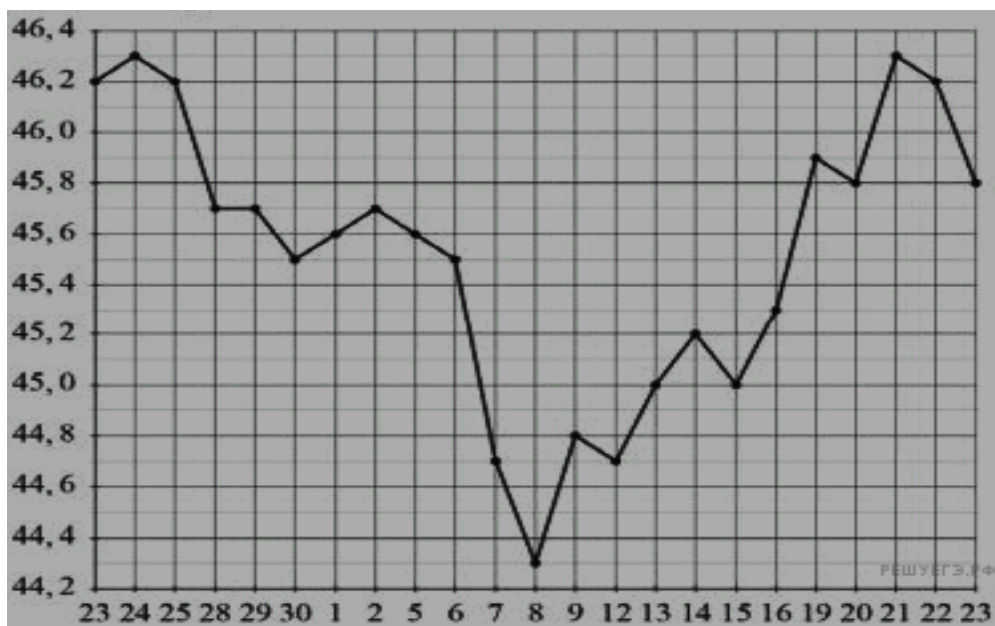


Резолваря:

Пе диаграмэ есте евидент кэ температура медие а аерулуй, ын декурсул де 7 лунь, ера май маре декыт 4 раде Челсиус.

Рэспунс: 7.

сау



Пе десен прин пункте фиксате есте арэатат прочесул валоэрий юанулуй кинез, стабилит де Банка чентралэ ал ФР, ын тоате зилеле де лукру де ла 23 септембрие пынэ ла 23 октомбрие а анулуй 2010. Пе оризонталэ сынт фиксате дателе луний, пе вертикалэ – костул юанулуй кинез ын рубле. Центру евиденцэ пунктеле маркате пе десен сынт уните прин линуце. Детерминаць дупэ десен чя май микэ валoare а юанулуй кинез ын рубле. Рэспунсул ыл презентация ын рубле.

Резолваря:

Пе десен есте евидент, кэ валoаря чя май микэ а юанулуй кинез а фост фиксатэ пе дата де 8 октомбрие ши валорифика 44,3 рубле.

Рэспунс: 44,3

В3

Пентру ун групп де оаспець стрэинь есте нечесар де а прокура 30 фой де кэлэуэ. Фоиле нечесаре ау фост гэсите ын трей интернет-магазине. Прецул уней фой ши кондициле де ливраре а тутурор кумпэрэтурилор сынт презентате ын табелэ.

Интернет-магазинул	Костул уней кэлэуэ (руб.)	Костул (руб.) транспортэрий	Кондициле суплиментаре
А	255	350	Ну сынт
Б	270	300	Транспортаря е гратис, дакэ сума комензей депэшеште 8000 руб.
В	245	450	Транспортаря е гратис, дакэ сума комензей депэшеште 7500 руб.

Кыте рубле ва коста чя май ефтинэ кумпэрэтурэ ымпреунэ ку транспортаря?

Резолваря: Прекэутэм тоате вариантеле посибиле.

Ын казул прокурэрий ын магазинул А костул а трейзечь де кэлэуэ ва алкэтуи 7650 руб., ымпреунэ ку транспортаря — 8000 руб.

Ын казул прокурэрий ын магазинул Б костул а трейзечь де кэлэуэ ва алкэтуи 8100 руб., транспортаря е гратис.

Ын казул прокурэрий ын магазинул В костул а трейзечь де кэлэуэ ва алкэтуи 7350 руб., ымпреунэ ку транспортаря — 7800 руб.

Астфел, костул миним а кумпэрэтурий ымпреунэ ку транспортаря - 7800 руб.

Рэспунс: 7800.

сау

Ын табелэ сынт презентате прецуриле медий (ын рубле) а унор продусе алиментаре де базэ ын трей ораше дин Русия (дупэ индичий ла ынчепутул анулуй 2010).

Денумиря продусулуй	Твер	Липецк	Барнаул
Пыне де грыу (батон)	11	12	14
Лапте (1 литру)	26	23	25
Картофь (1 кг)	9	13	16
Кашкавал (1 кг)	240	215	260
Карне (де витэ) (1 кг)	260	280	300
Улей де рэсэритэ(1 литру)	38	44	50

Детерминаць, ын каре дин ачесте ораше ва фи чел май ефтин сет а продуселор урмэтоаре: 2 батоане дин фэинэ де грыу, 3 кг де картофь, 1,5 кг де карне де витэ, 1 л улей де рэсэритэ. Ын рэспунс ынскриець костул сетулуй дат де продусе ын ачест ораш (ын рубле).

Резолваря: Ын орашул Твер костул а 2 батоане дин фэинэ де грыу, 3 кг де картофь, 1,5 кг де карне де витэ, 1 л де улей де рэсэритэ ва коста $11 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 1,5 \cdot 260 + 1 \cdot 38 = 477$ руб.

Ын орашул Липецк ачелаш сет де продусе ва коста $12 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 1,5 \cdot 280 + 1 \cdot 44 = 527$ руб.

Ын Барнаул: $14 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 1,5 \cdot 300 + 1 \cdot 50 = 576$ руб.

Чел май ефтин сет де produse поате фи кумпэрат ын орашул Твер пе о сумэ де 477 руб.

Рэспунс: 477

сау

Пентру транспортаря а 45 тоне де ынкэркэтурэ ла о дистанцэ де 1300 км се поате фолоси де ун сервичиу а унея дин трей фирме те транспорт. Костул транспортэрий ши ынкэркэтурий аутокамионулуй пентру фиекаре фирмэ де транспорт есте индикатэ ын табелэ. Кыте рубле ва фи нечесар де плэтит пентру чя май ефтинэ транспортаре?

Фирма де транспорт	Костул транспортэрий ку ун аутокамион (руб. пе 100 км)	Ынкэркэтура аутокамионелор (тоне)
A	3200	3,5
B	4100	5
B	9500	12

Резолваря.

Прекуэутэм тоате вариантеле посибиле.

Пентру транспортаря ынкэркэтурий де 45 тоне фирмей А вор фи нечесаре 13 аутокамионе. Костул транспортэрий унуй аутокамион есте $32 \cdot 1300 = 41\ 600$ руб. Костул транспортэрий тутурор 45 тоне ва фи $41\ 600 \cdot 13 = 540\ 800$ руб.

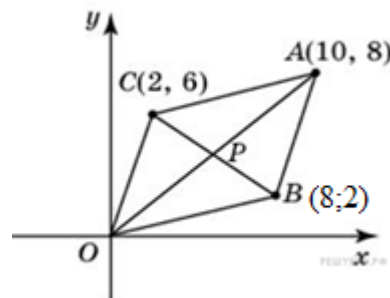
Фирмей Б вор фи нечесаре 9 аутокамионе. Костул транспортэрий унуй камион есте $41 \cdot 1300 = 53\ 300$ руб. Костул тотал а транспортэрий $53\ 300 \cdot 9 = 479\ 700$ руб.

Фирмей В вор фи нечесаре 4 аутокамионе. Сервичиул унуй камион костэ $95 \cdot 1300 = 123\ 500$ руб. Костул тотал а транспортэрий $123\ 500 \cdot 4 = 494\ 000$ руб.

Костул челей май ефтине транспортэрь есте де 479 700 руб.

Рэспунс: 479 700.

В4 Пунктеле $O(0; 0)$, $A(10; 8)$, $B(8; 2)$, $C(2; 6)$ сынт вырфуриле патрулатерулуй. Афлаць абсчиса пунктулуй P де интерсекцие а диагоналелор луй.



Резолваря.

$$BA = \sqrt{(10-8)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{40}$$

$$OC = \sqrt{(2-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{40}$$

$$OB = \sqrt{(8-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{68} \quad CA = \sqrt{(10-2)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{68}$$

Латуриле опусе а патрулатерулуй сынт респектив егале, деч патрулатерул дат есте паралелограм, чя че ынсямнэ кэ пунктул P есте мижлокул сегментулуй CB . Деачея координателе пунктулуй P се калкулязэ астфел:

$$x = \frac{2+8}{2} = 5; \quad y = \frac{6+2}{2} = 4$$

Рэспунс: 5.

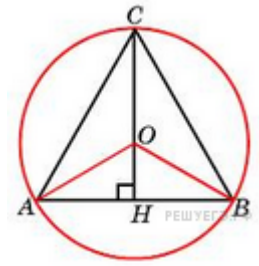
сау

Ынэлцимь триунгюлуй регулат есте егалэ ку 3. Афлаць раза чиркумферинцей чиркумскрисе ачестуй триунгь.

Резолваря.

Триунгюл ABC есте регулат ши деч тоате унгюриле луй сынт егале ку 60° . Дин релацииле куноскуте: $AC = 2R \cdot \sin B$ ии $CH = AC \cdot \sin A$ афлэм $CH = 2R \cdot \sin B \cdot \sin A$,

$$\text{деунде } R = \frac{CH}{2 \sin B \cdot \sin A} = \frac{3}{2 \sin^2 60^\circ} = \frac{3}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 2$$



Арэтэм о алтэ солуцие.

Ын триунгюл регулат раза чиркумферинцей чиркумскирисе есте егалэ ку доуэ треимь дин ынэлциме. Деч еа есте егалэ ку 2.

Рэспунс: 2.

сау

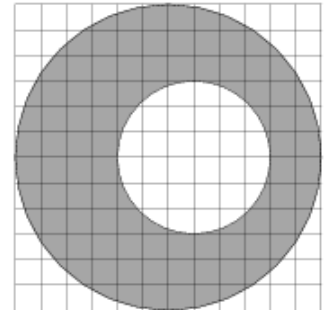
Пе о фоае ын пэтрэцеле сынт десенате доуэ черкурь. Ария черкулуй интерн есте егалэ ку 1. Афлаць ария фигурий хэшурате.

Резолваря.

Арииле черкурилор се рапортэ ка патрателе разелор лор. Раза черкулуй екстернор есте егалэ ку 6, раза черкулуй интернор ый егалэ ку 3. Деоарече раза черкулуй маре есте де 2 орь май маре декыт раза черкулуй мик. Ария черкулуй маре есте де 4 орь май маре декыт ария черкулуй мик. Адикэ, еа есте егалэ ку 4.

Ария фигурий хэшурате есте егалэ ку диференца ариилор черкурилор: $4 - 1 = 3$.

Рэспунс: 3.



В5

Ынтр-ун експеримент оказионал сынт арункате доуэ зарурь. Афлаць пробабилитатя евениментулуй кэ ла кэдеря зарурилор ын сумэ вом прими 10 пункте. Резултатул ыл ротунжиць пынэ ла сутимь.

Резолваря.

Нумэрул де казурь кынд ын резултатул експериенцей вом прими ын сумэ 10 пункте де тот сынт 3: $4+6, 5+5, 6+4$. Фиекаре зар аре шаесе позиций посибиле, яр доуэ зарурь $6 \cdot 6 = 36$ позиций екипробабиле. Деч, пробабилитатя евениментулуй, кэ ын сумэ вом общине 10 балурь, есте егалэ

$$\frac{3}{36} = 0,083\dots$$

Рэспунс: 0,08.

сау

Конферинца штиинцификэ се петрече ын декурс де 5 zile. Ын тотал с-ау плэнуит 75 де реферате – ын примеле трей zile а кыте 17 реферате, рестул ау фост репартизате ын мод егал ынтре zileле а патра ши а чинчя. Ординя реферателор се детерминэ прин сорц. Каре есте

пробабилитатя, кэ рефератул професорулуй М, ва фи презентат ын ултима зи а конференцией.

Резолваря.

Ын примеле трей зиле вор фи читите $17 \cdot 3 = 51$ де рефреате, пе ултимеле доуэ зиле рэмын $75 - 51 = 24$ де реферате. Деч пе ултима зи сынт плэнуите $24 : 2 = 12$ реферате.

Ынсямнэ кэ пробабилитатя фаптулуй кэ рефератул професорулуй М, ва фи презентат ын ултима зи а конференцией, есте егалэ ку $\frac{12}{75} = 0,16$

Рэспунс: 0,16.

сау

Ынаинте де а ынчепе мечул ла фотбал арбитрул арункэ о монедэ, пентру а стабилитатэ, каре дин екипе ва ынчепе мечул ку минжя. Екипа «Физик» жоакэ трей мечурь ку диферите екипе. Афлаць пробабилитатя фаптулуй кэ ын ачестя мечурь екипа «Физик» ва кыштига сорцул фикс де доуэ орь.

Резолваря.

Ынсемнэм прин «1» ачя парте а монедей, каре а кореспунде кыштигулуй сорцулуй екипей «Физик», партя а доуа а монедей о ынсемнэм прин «0». Атунч комбинэрь фаворабле сынт трей: 110, 101, 011, дар де тот авем $2^3 = 8$: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 де комбинэрь.

Астфел, пробабилитатя кэутатэ есте егалэ:

$$\frac{3}{8} = 0,375.$$

Рэспунс: 0,375.

В6 Резолваць екуация $\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1$.

Резолваря.

Обсервэм, кэ $1 = \log_5 5$ ши апликэм формула $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$. Обцинем:

$$\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1 \Leftrightarrow \log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + \log_5 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x > 0, \\ 7 - x = 5(3 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > -3, \\ 7 - x = 15 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Рэспунс: 2.

сау

Афлаць рэдэчина екуацией: $x = \frac{6x-15}{x-2}$. Дакэ екуация аре май мулте рэдэчинь, ын рэспунс индикаць рэдэчина май маре.

Резолваря.

Домениул валорилор адмисибиле: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Атунч

$$x = \frac{6x - 15}{x - 2} \Leftrightarrow x(x - 2) = 6x - 15 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5; \\ x = 3. \end{cases}$$

Амбеле рэдэчинь се концин ын ДВА. Рэдэчина май маре есте 5.

Рэспунс: 5.

сау

Резолваць екуация $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$.

Резолваря

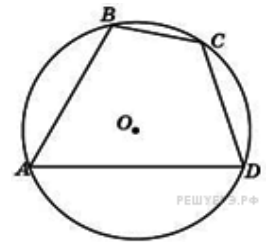
Тречем ла о базэ а путерий:

$$2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x} \Leftrightarrow \frac{2^{3+x}}{5^{3+x}} = 0,4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = \left(\frac{2}{5}\right)^1 \Leftrightarrow 3+x=1 \Leftrightarrow x=-2.$$

Рэспунс: -2.

В7

Пунктеле A, B, C, D , ситуате пе чиркумферинцэ, ымпарт ачастэ чиркумферинцэ ын патру аркурь AB, BC, CD ши AD , мэримиле кэроря ын граде се рапортэ кореспунзэтор ка $4:2:3:6$. Афлаць унгул A патрулатерул $ABCD$. Рэспунсул ыл презентачь ын граде.



Резолваря.

Фие мэримя аркулуй AB ын граде есте егалэ ку $4x$, атунч $4x + 2x + 3x + 6x = 360^\circ \Leftrightarrow x = 24^\circ$.

Унгул ынскрис ын чиркумферинцэ есте егал ку жумэтатя аркулуй пе каре ел се сприжинэ.

$$\angle A = \frac{1}{2}(\cup BC + \cup CD) = \frac{1}{2}(2x + 3x) = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Рэспунс: 60.

сау

Ын триунгул ABC унгул C есте егал ку 90° , $\cos A = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

Афлаць $\operatorname{tg} A$.

Резолваря.

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A} = \frac{\sqrt{1 - \frac{16}{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = 0,25.$$

Рэспунс: 0,25.

сау

Ын триунгул ABC унгул C есте егал ку 90° , CH – ынэлцимя, $BC = 4\sqrt{5}$, $BH = 4$. Афлаць $\operatorname{tg} A$.

Резолваря.

Унгиориле A ши HCB сынт егале ка унгиорь ку латуриле респектив перпендикуларе.

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \angle HCB = \frac{HB}{CH} = \frac{HB}{\sqrt{CB^2 - HB^2}} = \frac{4}{\sqrt{80 - 16}} = 0,5.$$

Рэспунс: 0,5.

сау

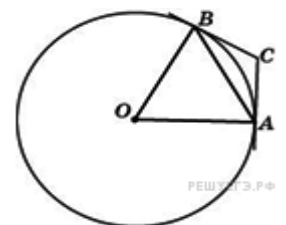
Прин екстремитэциле A, B а аркулуй чиркумферинцей де 62° сынт трасате дрепте тангенте AC ши BC . Афлаць унгул ACB . Рэспунсул ыл презентачь ын граде.

Резолваря.

Мэримя унгулуй формат де тангентэ ши коардэ, дусе принтр-ун пункт ал чиркумферинцей, есте егалэ ку жумэтатя аркулуй чиркумферинцей купринс ынтрэ еле.

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle CBA) = 180^\circ - \cup AB = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ.$$

Рэспунс: 118.



В8

Дряпта $y = -4x - 11$ есте танженцэ ла графикул функций

$y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Афлаць абсчиса пунктулуй де танженцэ.

Резолваря.

Кондиция де танженцэ а графикулуй функцией $y = f(x)$ ку дряпта $y = kx + b$ се

редэ прин системул де черинце:
$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$
 Ын казул ностру авем:

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 7 = -4, \\ x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{3}, \\ x = -1, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 (*) \end{cases}$$

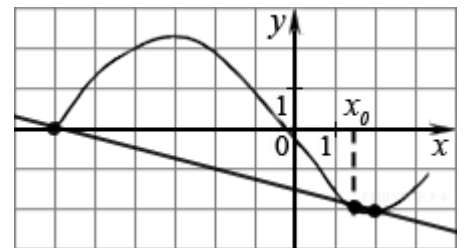
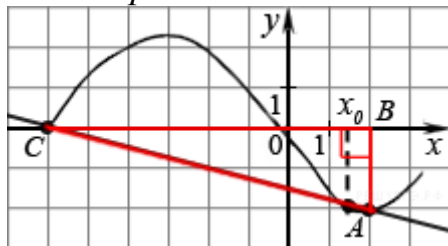
Контролул прин субституцие аратэ, кэ прима рэдэчинэ ну сатисфаче, яр а доуа сатисфаче скуацией (*). Деачея абсчиса кэутатэ а пунктулуй де танженцэ есте -1 .

Рэспунс: -1

сау

пе десен есте репрезентат графикул функцией $y=f(x)$ ши дряпта танженцэ ла ел ын пунктул ку абсчиса x_0 . Афлаць валоаря дериватей функцией $f(x)$ ын пунктул x_0 .

Резолваря.



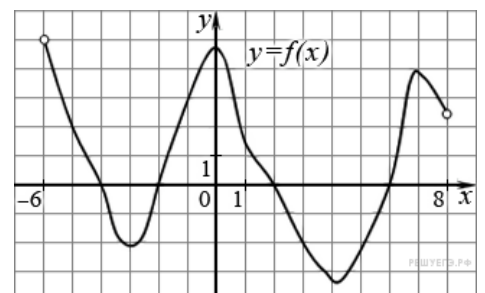
Валоаря дериватей функцией ын пунктул де танженцэ есте егалэ ку коефициентул унгулар ал танженцей, каре ла рындул сэу есте егал ку танжента унгулуй формат де дряпта танженцэ ши акса абсчиселор. Конструим триунгул ку вырфуриле ын пунктеле $A(2; -2)$, $B(2; 0)$, $C(-6; 0)$. Унгул де ынклинацие а дрептей танженце фацэ де акса абсчиселор есте егал унгулуй алэтурат унгулуй ACB :

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg} \angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25$$

Рэспунс: $-0,25$

сау

Пе десен есте репрезентат графикул функцией $y = f(x)$, дефините пе интервалал $(-6; 8)$. Детерминаць нумэрул де пункте ынтрежь, ын каре деривата функцией есте позитивэ.

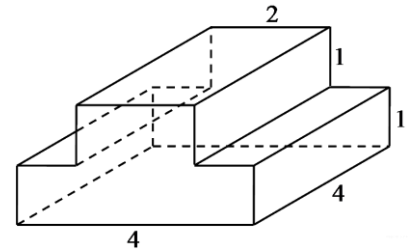


Резолваря.

Деривата функцией есте позитивэ ын ачеле интервале, ын каре функция есте крескэтоаре, адикэ пе интервалеле $(-3; 0)$ ши $(4, 2; 7)$. Ын еле се концин урмэтоареле нумере нтрежь $-2, -1, 5$ ши 6 , ын тотал 4 нумере.

Рэспунс: 4.

В9 Афлаць ария супрафцей полиедрулуй, репрезентат пе десен (тоате унгиуриле диедре сынт дрепте).



Резолваря.

Ария супрафцей полиедрулуй дат есте егалэ ку сама аршилор дрептунпорилор ку латуриле 2, 1, 4 ши 4, 4, 1, микшорате ку ындоита арие а дрепт унгиулуй ку латуриле 2, 4:

$$S = 2(4 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4) + 2(2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4) - 2(2 \cdot 4) = 60.$$

Рэспунс: 60

сау

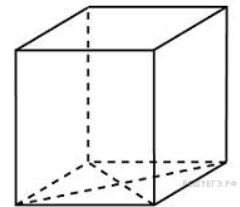
Ла база уней призме дрепте се афлэ ун ромб диагонале кэруя сынт егале ку 6 ши 8. Ария супрафцей призмей есте егалэ ку 248. Афлаць лунжимя мукий латерале а ачестей призме.

Резолваря.

Латура ромбулуй a се експримэ прин диагонале

луй d_1 ши d_2 астфел $a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 5$. Ария ромбулуй

$$S_p = \frac{1}{2}d_1d_2 = 24$$



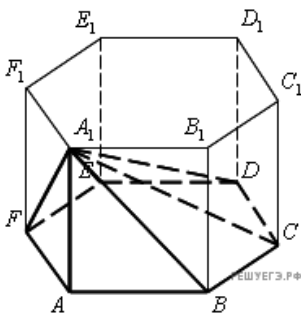
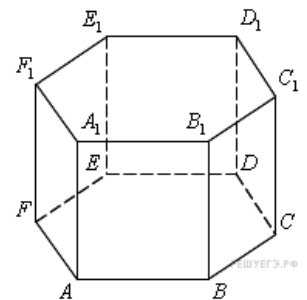
Атунч мукия латералэ вом афла дин експресия арией супрафцей призмей дате:

$$S = 2S_{\text{ромба}} + 4aH \Leftrightarrow H = \frac{S - 2S_{\text{ромба}}}{4a} = \frac{248 - 48}{20} = 10$$

Рэспунс: 10.

сау

Афлаць волумул полиедрулуй, ырфуриле кэруя сынт пунктеле A, B, C, D, E, F, A_1 а призмей хексагонале дрепт $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ ария базей а кэрея есте егалэ ку 4, яр мукия латералэ ку 3.



Резолваря.

База пирамидей е ачеш ка ши база призмей хексагонале регулате, ши ынэлцимя ла еле есте комунэ.

Ын аша фел

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пр}}h_{\text{пр}} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4.$$

Рэспунс: 4.

ПАРТЯ 2

B10

Афлац валоаря експрессией $\frac{7\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} + \frac{5\sqrt{x}}{x} + 3x - 4$ **пентру** $x = 3$.

Резолваря.

Деорече $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, примим:

$$\frac{7\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt{x}} + 3x - 4 = \frac{7\sqrt{x}-5+5}{\sqrt{x}} + 3x - 4 = 7 + 3x - 4 = 3x + 3 = 12$$

*Рэспунс: 12.***сау**

Афлац валоаря експрессией $\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$.

Резолваря.

Бндеплиним трансформэриле:

$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 \frac{50}{2}} = 9^2 = 81$$

*Рэспунс: 81.***сау**

Афлац валоаря експрессией

$$\frac{14 \sin 19^\circ}{\sin 341^\circ}$$

Резолваря.

Бндеплиним трансформэриле:

$$\frac{14 \sin 19^\circ}{\sin 341^\circ} = \frac{14 \sin 19^\circ}{\sin(360 - 19)^\circ} = \frac{14 \sin 19^\circ}{-\sin 19^\circ} = -14$$

*Рэспунс: -14.***сау**

Афлац валоаря експрессией

$$\frac{2 \sin(\alpha - 7\pi) + \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}{\sin(\alpha + \pi)}$$

Резолваря.

Бндеплиним трансформэриле:

$$\frac{2 \sin(\alpha - 7\pi) + \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-2 \sin(\pi - \alpha) + \sin \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{-2 \sin \alpha + \sin \alpha}{-\sin \alpha} = 1.$$

*Рэспунс: 1.***B11**

Депенденца волумулуй черинцей q (унитэць пе лунэ) ла продуселе ынтреприндерий – монополисте де прецул p (мий рубле) се презинтэ прин формула $q = 100 - 10p$. Венитул ынтреприндерий пе о лунэ r (мий рубле) се калкулязэ дупэ формула $r(p) = qp$.

Детерминаць прецул чел май маре p , прин каре венитул лунар $r(p)$ ва фи ну май мик декыт 240 мий. рубле. Рэспунсул ыл презентация ын мий рубле.

Резолваря.

Проблема се редуче ла резолваря инекуацией $r(p) \geq 240$:

$$r(p) = q \cdot p = (100 - 10p)p = 100p - 10p^2,$$

$$r(p) \geq 240 \Leftrightarrow 10p^2 - 100p + 240 \leq 0 \Leftrightarrow p^2 - 10p + 24 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq p \leq 6.$$

Рэспунс: 6.

сау

О минже микэ а фост арункатэ суб ун унгь аскуцит α фацэ де супрафаца оризонталэ а пэмынтулуй. Дистанца, каре а трекут-о минжя се калкулязэ дупэ формула $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), унде $v_0 = 20$ м/с – витеза инициалэ а минжей, g – акчелерация кэдерей либере (сокотиць $g = 10$ м/с²). Каре есте чя май микэ валoare а унгулуй α (ын граде) пентру ка минжя сэ трякэ рыул лэцимя кэруя есте егалэ ку 20м.?

Резолваря.

Проблема се редуче ла резолваря инекуацией $L \geq 20$ пе интервалул $(0^\circ; 90^\circ)$, апликынд валoаря витезей инициале $v_0 = 20$ м/с ши акчелерацией кэдерей либере $g = 10$ м/с²:

$$\frac{20^2}{10} \sin 2\alpha \geq 20 \Leftrightarrow \sin 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30^\circ + 360^\circ n \leq 2\alpha \leq 150^\circ + 360^\circ n \quad \Leftrightarrow \quad 0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 30^\circ \leq 2\alpha \leq 150^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 15^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ \quad \begin{matrix} 0^\circ < 2\alpha < 180^\circ \\ 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \end{matrix}$$

Рэспунс: 15.

сау

Ын приза електрикэ сынт ынтродусе апарате, резистенца комунэ а кэроора есте $R_1 = 90$ Омь. Паралел ку еле ын призэ се преведе де а ынтродуче ун ынкэлзитор електрик. Детерминаць чя май микэ резистенцэ посибилэ R_2 а ачестуй ынкэлзитор, дакэ есте куноскут кэ прин униря паралелэ а дой кондукторь ку резистенцэ R_1 Омь ши R_2 Омь резистенца лор комунэ се редэ прин формула $R_{\text{тoтaл}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом),

яр пентру функциoнaря нормалэ а рецелей електриче резистенца ей тоталэ требуе сэ фие ну май микэ декыт 9 Омь. Резултатул ыл экспримаць ын Омь.

Резолваря.

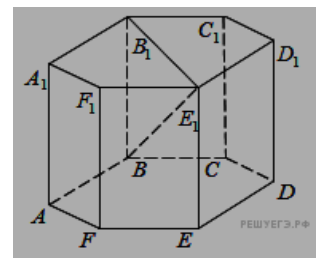
Проблема се редуче ла резолваря инекуацией

$$R_{\text{тoтaл}} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{90R_2}{90+R_2} \geq 9 \Leftrightarrow 81R_2 \geq 810 \Leftrightarrow R_2 \geq 10 \quad \text{Омь.}$$

Рэспунс: 10.

B12

Ын призма хексагоналэ регулатэ $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ тоате мукииле сынт егале ку $\sqrt{5}$. Афлаць дистанца динтре мукииле B ши E_1



Резолваря. Прекэутэм триунгул дрептунгик $BB_1 E_1$.

Дупэ теорема луй Пифагора: $BE_1 = \sqrt{BB_1^2 + B_1 E_1^2}$.

$B_1 E_1$ — есте диагонала маре а хексагонулуй регулат ши лунжимя ей есте егалэ ку ындоитул лунжимей латурей хексагонулуй. Деч $B_1 E_1 = 2\sqrt{5}$.

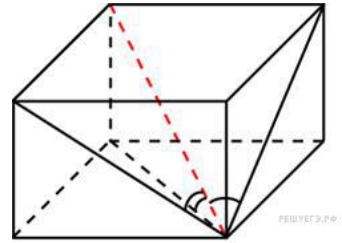
Деoарече $BB_1 = \sqrt{5}$ обцинем :

$$BE_1 = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5 + 4 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$$

Рэспунс: 5.

сау

Диагонала паралелепедулуй дрептунгик есте егалэ ку $\sqrt{8}$ ши формязэ ку планеле фецелор луй унгюрь де 30° , 30° ши 45° . Афлаць волумул паралелепедулуй.



Резолваря.

Мукия паралелепедулуй опусэ унгулуй де 45° есте егалэ ку $\sqrt{8} \sin 45^\circ = 2$, деоарече формязэ ку диагонала датэ ши диагонала уней феце ун триунгь исосчел. Челелалте доуэ мукий дупэ конструкции сынт ситуате ын триунгюрь дрептунгиче контра унгулуй де 30° ши сынт егале ку жумэтатя

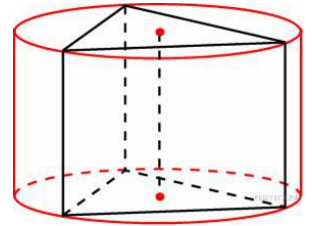
$$2 \cdot \frac{\sqrt{8}}{2} \frac{\sqrt{8}}{2} = 4.$$

диагоналей. Астфел волумул паралелепедулуй есте:

Рэспунс: 4

сау

Афлаць ария супрафецей латерале а призмей триунгюларе регулате ынскрисе ынтр-ун чилиндру, раза базей кэруя есте егалэ ку $2\sqrt{3}$, яр ынэлцимя ку 2.



Резолваря.

Латура триунгюлуй екилатерал се експримэ прин раза чиркумферинцей чиркумскрисе астфел: $a = \sqrt{3}r = 2\sqrt{3}\sqrt{3} = 6$.

Атунч ария супрафецей латерале а призмей есте егалэ ку $S_{лат} = Ph = 3ah = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$.

Рэспунс: 36.

В13 О шалупэ ку мотор а паркурс контра дирекцией апей рыулуй 112 км. ши с-а ынторс ын пунктул де порнире, келтуинд ын дирекция опусэ ку 6 оре май пуцин. Афлаць витеза курентулуй апей, дакэ витеза шалупей ын апэ стэтэтоаре есте де 11 км пе орэ. Рэспунсул ыл даць ын км. пе орэ.

Резолваря.

Фие u км/орэ – витеза апей ын рыу, атунч витеза шалупей ын дирекция апей есте егалэ ку $11 + u$ км/орэ, яр ынапой ку $11 - u$ км/орэ. Авынд ын ведере кэ ын дирекция апей шалупа а мерс ку 6 оре май пуцин декыт контра, компунем ши резолвэм екуация:

$$\frac{112}{11 - u} - \frac{112}{11 + u} = 6 \Leftrightarrow \frac{224u}{(11 - u)(11 + u)} = 6 \Leftrightarrow \frac{112u}{121 - u^2} = 3 \Leftrightarrow_{u > 0}$$

$$\Leftrightarrow 112u = 3(121 - u^2) \Leftrightarrow 3u^2 + 112u - 363 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -40\frac{1}{3} \\ 3 \end{cases}$$

Кондицией проблемей ый кореспунде $u = 3$.

Рэспунс: 3.

сау

Фиекаре дин дой мунчиторь де ачеяшь калификаре поате ындеплини о командэ ын 15 оре. Песте 3 оре дупэ ачея кынд унул дин ей а ынчепут ындеплиниря комензей с-а алэтурат ал дойля мунчиторь ши ачест лукру ей л-ау дус пынэ ла капэт ымпреунэ. Кыте оре ау фост нечесаре пентру ындеплиниря комензей дате?

Резолваря.

Мунчиторул ындеплинеште а $1/15$ парте ын орэ а комензей, деачея ын 3 оре ел ва ындеплини а $1/5$ парте. Дупэ ачаста ла ел с-а алэтурат ал дойля мунчиторь ши, лукрынд ымпреунэ ачеяшь дой мунчиторь требуе сэ ындеплиняскэ а $4/5$ парте де командэ. Пентру а детермина тимпул лукрулуй лор ымпреунэ ымпэрцим ачест волум де лукрул ла продуктивитатя лор комунэ:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} = 6 \text{ оре.}$$

Астфел, пентру а ындеплини тоатэ команда е нечесар де $6 + 3 = 9$ оре.

Рэспунс: 9.

сау

Бизнесманул а примит ын анул 2000 ун венит ын сумэ де 5000 рубле. Ку фиекаре ан венитул луй се мэря ку 300% ын компарацие ку анул пречедент. Кыте рубле а кыштигат бизнесманул ын анул 2003?

Резолваря.

Бизнесманул а примит ын анул 2000 ун венит ын сумэ де $b_1 = 5000$ рубле. Ын фиекаре урмэторул ан венитул луй се мэря ку 300%, адикэ де $q = 4$ орэ, ын компарацие ку анул пречедент. Ын анул 2003 бизнесманул а кыштигат:

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 = 5000 \cdot 4^3 = 320000 \text{ рубле.}$$

Рэспунс: 320000.

В14 Афлаць чя май маре валoare а функцией $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$ пе сегментул $[-3;3]$

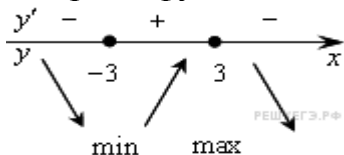
Резолваря.

Афлэм деривата функцией дате: $y' = 9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$.

Афлэм zeroуриле дериватей:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -3. \end{cases}$$

Детерминэм семнеле дериватей функцией ши репрезентэм пе десен скимбэриле функцией:



Деривата функцией пе $(-3; 3)$ есте позитивэ функция датэ пе ачест интервал есте крескэтоаре ши деч чя май маре валoare пе сегментул дат функция о примеште ын пунктул $x=3$:

$$y(3) = 5 + 27 - 9 = 23.$$

Рэспунс: 23.

сау

Афлаць пунктул де максим ал функцией $y = -\frac{x^2+289}{x}$

Резолваря.

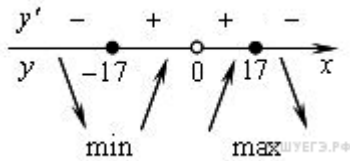
Афлэм деривата функцией дате:

$$y' = -\left(\frac{x^2+289}{x}\right)' = -\left(x + \frac{289}{x}\right)' = -\left(1 - \frac{289}{x^2}\right) = \frac{289-x^2}{x^2}.$$

Афлэм zeroуриле дериватей:

$$x^2 = 289 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17, \\ x = -17. \end{cases}$$

Детерминэм семнеле дериватей функцией ши репрезентэм пе десен скимбэриле функцией:



Пунктул максим функцией есте $x = 17$.

Рэспунс: 17.

сау

Афлаць пунктул де миним ал функцией $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36}$

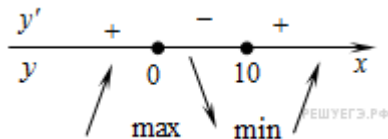
Резолваря.

Афлэм деривата функцией дате:

$$y' = (3x^2 - 36x + 36)'e^{x-36} + (3x^2 - 36x + 36)(e^{x-36})' = \\ = (6x - 36)e^{x-36} + (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36} = (3x^2 - 30x)e^{x-36} = 3x(x - 10)e^{x-36}.$$

Афлэм zeroуриле дериватей: $x=0$, $x=10$

Детерминэм семнеле дериватей функцией ши репрезентэм пе десен скимбэриле функцией:



Пунктул валорий миниме а функцией есте $x = 10$.

Рэспунс: 10.

Ну уйтацэ сэ трнансферацэ тоате рэспунсуриле ын формуларул де рэспунсурь № 1

Пентру ынскриера резолварилор ши рэспунсурилор ла ынсэрчинэриле С1-С7, фолосиць формуларул рэспунсурилор №2. Скриець, ын примул рынд, нумэрул сарчиний де лукру (С1, С2, ш.а.м.д.), ши аной резолваря деплинэ ши рэспунсул .

С1

а) Резолваць екуация

$$4 \cos^2 x + 4 \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) - 1 = 0.$$

б) Афлаць тоате рэдэчиниле ачестей екуаций, ситуате пе

сегментул $\left[\pi, \frac{5\pi}{2} \right]$.

Резолваря.

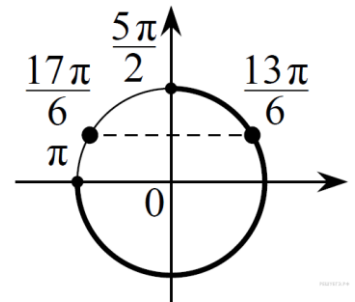
а) Ынскрием екуация датэ ын фелул урмэтор:

$$4 - 4 \sin^2 x - 4 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x + 3)(2 \sin x - 1) = 0$$

Ынсямнэкэ, сау $\sin x = -\frac{3}{2}$ – екуация н-аре солуцие,

сау $\sin x = \frac{1}{2}$, де унде $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



б) Ку ажуторул чиркумферинцей нумериче алежем

рэдэчиниле екуацией, ситуате пе сегментул $\left[\pi, \frac{5\pi}{2} \right]$. Обцинем нумэрул $\frac{13\pi}{6}$.

Рэспунс: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

сау

Резолваць екуация : $\sqrt{\sin x \cos x} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} 2x} + 1 \right) = 0.$

Резолваря.

Трансформэм екуация:

$$\sqrt{\sin x \cos x} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} 2x} + 1 \right) = 0. \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \sin 2x} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x + 1}{\operatorname{tg} 2x} \right) = 0.$$

Де аич обцинем урмэтоаре доуэ системе:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \operatorname{tg} 2x \neq 0. \end{cases} \text{ ши } \begin{cases} \operatorname{tg} 2x + 1 = 0, \\ \sin 2x \geq 0, \\ \operatorname{tg} 2x \neq 0 \end{cases}$$

Примул систем н-аре солуций. Ын казул дой авем:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x + 1 = 0, \\ \sin 2x \geq 0, \\ \operatorname{tg} 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = -1, \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \sin 2x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Рэспунс: $\frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

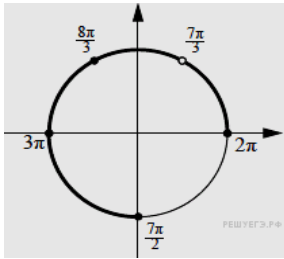
сау

а) Резолваць екуация $\frac{\cos 2x + \sqrt{3} \sin x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0.$

б) Афлаць тоате рэдэчиниле ачестей екуацией, ситуате пе сегментул

$$\left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right].$$

Резолваря.



а) Прекэутэм системул:

$$\begin{cases} \cos 2x + \sqrt{3} \sin x - 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x - \sqrt{3} \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Резолвэм прима екуация а системулуй:

$$\cos 2x + \sqrt{3} \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Кондицией $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \neq 0$ сатисфак нумай солуцииле $x = \pi n$ ши $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

б) Рэдэчиниле екуацией ситуате пе сегментул $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right]$ ле вом алеже ку

ажуторул чиркумферинцей унитаре. Обцинем: $2\pi; \frac{8\pi}{3}; 3\pi$.

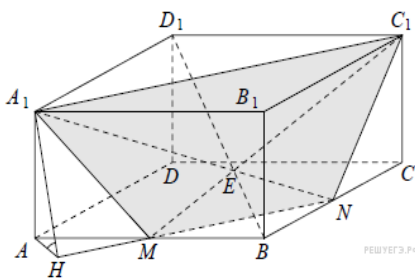
Рэспунс: а) $\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $2\pi; \frac{8\pi}{3}; 3\pi$.

C2 Ла база призмей дрепте $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ се афлэ патратул $ABCD$ ку латура де 2 унитэць, яр ынэлцимя призмей есте егалэ ку 1. Пунктул E се афлэ пе диагонала BD_1 , прекум $BE = 1$.

а) Конструиць секциуня призмей прин планул $A_1 C_1 E$.

б) Афлаць мэримя унгиюлуй динтре планул секциуней ши планул ABC .

Резолваря.



а) Дрептеле AB ши $C_1 E$ сынт ситуате ынтр-ун сингур план ABC_1 ши се интерсектязэ ын пунктул M . Ла фел, BC ши $A_1 E$ сынт ситуате ынтр-ун сингур план BCA_1 ши се ынтерсектязэ ын пунктул N . Трапезул $A_1 C_1 N M$ – секциуня кэутатэ.

б) $BD_1 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$, яр $BE = 1$.

$$\text{Деч, } \frac{BE}{ED_1} = \frac{1}{2}.$$

Дин асемэнаря триунгиурилор $D_1 C_1 E$ ши BME афлэм, кэ $\frac{BM}{D_1 C_1} = \frac{1}{2}$, деунде $BM = 1$. Резултэ, кэ $AM = 1$. Аналог, $BN = 1$.

Коборым перпендикуларе AH пе дряптэ MN . Пе база теоремей челор трей перпендикуларе $A_1 H \perp MN$, ши, деч, $\angle A_1 H A$ — есте унгиюл кэутат.

Дин триунгиюл AHM афлэм, кэ $AH = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Атунч $\operatorname{tg} \angle A_1 H A = \frac{AA_1}{AH} = \sqrt{2}$.

Рэспунс: б) $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

сау

Ынтр-о призмэ хексагоналэ регулатэ $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ тоате мукииле сынт егале ку **1**. Афлаць мэримя унгиюлуй динтре дряпта AC' ши планул ACD' .

Резолваря.

Ынтродучем системул дрептунгиулар де координате, кум есте арэатат пе десен:

$$A(0; 0; 0), C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), C'\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right), D'(1; \sqrt{3}; 1),$$

$$\vec{AC}' = \left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right).$$

деунде

Планул ACD' трече прин орижиня де координате,

екуация ей есте $Ax + By + Cz = 0$. Пентру координателе пунктелор

$$\begin{cases} \frac{3}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B + 0C = 0, \\ A + \sqrt{3}B + C = 0. \end{cases}$$

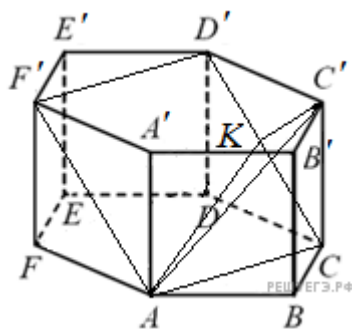
C ши D' примим урмэторул систем де екуаций:

Ну перзинд женерализаря, сокотим $A = 1$, атунч $B = -\sqrt{3}$, $C = 2$. Екуация планулуй ACD' : $x - \sqrt{3}y + 2z = 0$, Векторул нормал ла еа: $\vec{n} = (1; -\sqrt{3}; 2)$. Атунч унгиул кэутат динтре дряпта AC' ши планул ACD' есте егал

$$\arcsin \frac{|\vec{AC}' \cdot \vec{n}|}{|\vec{AC}'| |\vec{n}|} = \arcsin \frac{|\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 2|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4} + 1}} = \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Рэспунс: } \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Презентэм о алтэ солуцие.



$\angle C'AK$ — унгиул кэутат, деоаре че ел есте унгы динтре дряптэ ши проекция ей AK .

$\angle C'KA = 90^\circ$, фиинд-кэ $ACD' \perp CC'D$ дин казул кэ $AC \perp CC'$ ши $AC \perp CD$.

$$\Delta AC'K : AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2;$$

Прекэутэм

$$KC' = \frac{1}{2}C'D = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(фиинд кэ $C'D$ — диагонала

патратулуй $CC'DD'$)

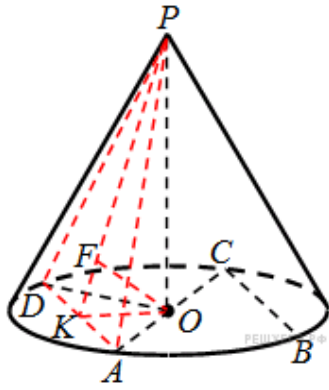
$$\angle C'AK = \arcsin \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \cdot 2} \right) = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

$$\text{Рэспунс: } \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

сау

Сегментул AC — диаметрул базей конулуй, сегментул AP — женератоаря ачестуй кон ши $AP = AC$. Коарда базей BC компуне ку дряпта AC унгиул де 60° . Прин AP есте интерсектат конул де ун план, паралел дрептей BC . Афлаць дистанца де ла чентрул базей O пынэ ла планул секциуней, дакэ раза базей конулуй есте егалэ ку **1**.

Резолваря.



Фие сегментул AD — коарда базей паралелэ коардей BC . Атунч триунгюл ADP ши есте секциуня датэ а конулуй деоарече ел концине дряпта AP ши дряпта AD , паралелэ коардей BC . Коборым перпендикулара PK пе дряпта AD . Конформ теоремей челор трей перпендикуалре сегментул OK ла фел есте перпендикулар ла AD , ынсямнэ, $AD \perp (OPK)$. Ынэлцимя OF а триунгюлуй OPK есте ситуатэ ын планул OPK , ши деч $OF \perp AD$ ши $OF \perp PK$, ынсямнэ кэ, $OF \perp (ADP)$.

Май депатре афлэм:

- 1) Дин конлиция $AD \parallel BC : \angle DAC = \angle BCA = 60^\circ$;
- 2) Дин триунгюл дрептунгик $AOD : OK = \frac{AO\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- 3) Дин триунгюл дрептунгик $APD : PO^2 = AP^2 - AO^2 = 4R^2 - R^2 = 3$;
- 4) Дин триунгюл дрептунгик KPO :
 - а) $KP = \frac{\sqrt{PO^2 + KO^2}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$;
 - б) $OF = \frac{OK \cdot OP}{PK} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

Рэспунс: $\frac{3}{\sqrt{15}}$.

сау

Ынтр-о пирамидэ патрулатерэ регулатэ мукия лэтуратэ а кэрея есте егалэ ку 17, яр ынэлцимя ку 7, есте ынскрисэ сфера. (Сфера есте тангентэ ла тоате фецеле пирамидей). Афлаць ария ачестей сфере.

Резолваря.

Фие MN — ынэлцимя пирамидей пирамидей патрулатерэ регулатэ $MABCD$ ку ырфул M , атунч триунгюл AMH — дрептунгик, $MA = 17, MN = 7$, деунде

$$AH = \sqrt{MA^2 - MN^2} = 4\sqrt{15}.$$

Триунгюл ABH — дрептунгик исосчел, ши деч $AB = AH\sqrt{2} = 4\sqrt{30}$.

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 13.$$

Ын триунгюл AMB ынэлцимя

$$HN = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{30}.$$

Ын триунгюл дрептунгик исосчел ABH ынэлцимя

Чентрул сферей O , ынскрисе ын пирамида патрулатерэ регулатэ, есте ситуат пе ынэлцимя ей MN , пунктул K де танженцэ а сферей ку фаца латералэ AMB се афлэ пе сегментул MN . Триунгюриле MOK ши MNH сынт асеменя, ши деч

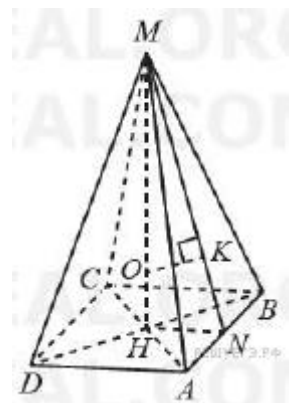
$$MO : OK = MN : HN \Leftrightarrow \frac{7-r}{r} = \frac{13}{2\sqrt{30}} \Leftrightarrow (7-r) \cdot 2\sqrt{30} = 13 \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{26\sqrt{30} - 120}{7},$$

$$S = 4\pi r^2 = \frac{480(289 - 52\sqrt{30})\pi}{49}.$$

унде r — раза сферей. Ария супрафецей сферей

$$\frac{480(289 - 52\sqrt{30})\pi}{49}.$$

Рэспунс: $\frac{480(289 - 52\sqrt{30})\pi}{49}$.



С3 Резолваць системул де инекуаций:
$$\begin{cases} \log_{x+1}(2x-5) + \log_{2x-5}(x+1) \leq 2, \\ 25^x - 20^x - 2 \cdot 16^x \leq 0. \end{cases}$$

Резолваря.

Резолвэм прима инекуацие:
$$\log_{x+1}(2x-5) + \frac{1}{\log_{x+1}(2x-5)} \leq 2.$$

Фачем субституция $y = \log_{x+1}(2x-5)$:
$$y + \frac{1}{y} \leq 2; \frac{(y-1)^2}{y} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Дакэ $\log_{x+1}(2x-5) = 1$, атунч

$$\begin{cases} x+1 = 2x-5, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Дакэ $\log_{x+1}(2x-5) < 0$, атунч
$$\begin{cases} \frac{(2x-5-1)}{(x+1-1)} < 0 \\ x+1 > 0 \\ 2x-5 > 0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x} < 0 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < 3.$$

Солуция примей инекуацией: $\frac{5}{2} < x < 3$ сау $x = 6$.

Резолвэм инекуация а доуа. Ымпэрчим амбеле парць ла 16^x :

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{4}\right)^x - 2 \leq 0.$$

Фачем субституция $z = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Обцинем: $z^2 - z - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq z \leq 2.$

Ынторкындусе ла варианта инициалэ обцинем: $\left(\frac{5}{4}\right)^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \log_{1,25} 2.$

Солуция инекуацией а доуа: $x \leq \log_{1,25} 2.$

Афлэм интерсекция солуциилор примите. Луынд ын ведере, кэ

$$3 < \log_{\frac{5}{4}} 2 < 6, \text{ афлэм мулцимя солуцилор системулуй: } \left(\frac{5}{2}; 3\right).$$

Рэспунс: $\left(\frac{5}{2}; 3\right).$

сау

Резолваць инекуация $\log_{x-1} \sqrt{x+2} \cdot \log_3 (x^2 - 2x + 1) \geq \log_9 (10 - x).$

Резолваря.

Трансформэм инекуация датэ:

$$\begin{aligned} 2 \log_{x-1} \sqrt{x+2} \cdot \log_3 (x-1) &\geq \log_9 (10-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \log_3 (x-1)^{\log_{x-1} \sqrt{x+2}} &\geq \log_9 (10-x) \Leftrightarrow 2 \log_3 \sqrt{x+2} \geq \log_9 (10-x) \end{aligned}$$

ку кондицииле $x > 1$ ши $x \neq 2$.

Май департе:

$$\log_3(x+2) \geq \log_9(10-x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9(x^2+4x+4) \geq \log_9(10-x), \\ x+2 > 0, \\ x < 10 \end{cases}$$

Луынд ын ведере кондиция $x > 1$, инегалитатя $x+2 > 0$ поате фи негате.

Тречем ла система

$$\begin{cases} x^2+4x+4 \geq 10-x, \\ 10-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6 \geq 10-x, \\ x < 10. \end{cases}$$

деунде $x \leq -6$ сау $1 \leq x < 10$. Луынд ын ведере, кэ $x > 1$ ши $x \neq 2$, афлэм солуция:
 $x \in (1; 2) \cup (2; 10)$.

Рэспунс: $(1; 2) \cup (2; 10)$.

сау

Резолваць инекуация: $\log_{\log_x 2x}(6x-2) \geq 0$.

Резолваря.

Домениул де дефиницие а инекуацией се редэ прин урмэтоареле релаций:

$$\begin{cases} \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1, \\ 6x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$

Ын домениул валорилор адмисибиле (ДВА) ау лок урмэтоареле релаций:

$$\log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b-1}{a-1} \geq 0, \log_a b - \log_a c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b-c}{a-1} \geq 0, a^b - a^c \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-c) \geq 0.$$

$$\log_{\log_x 2x}(6x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x-3}{\log_x 2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3(2x-1)}{\log_x 2x - \log_x x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$

Луынд ын ведере ДВА обцинем рэспунсул.

Рэспунс: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

C4

Дистанца динтре доуэ дрепте паралел есте егалэ ку 12. Пе уна дин еле есте ситуат пунктул C , яр пе чялалтэ – пунктеле A ши B прекум триунгюл ABC есте исосчел ку латура латералэ де 13 унитэць. Афлаць раза чиркумферинцей, ынскрисе ын триунгюл ABC .

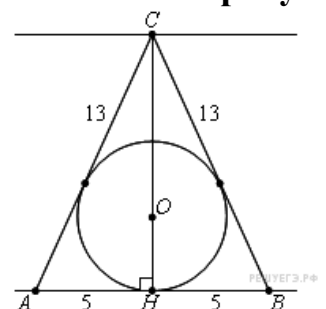
Резолваря.

Обсервэм, кэ сынт посибиле тоате трей казурь: $AC=BC$, $AB=BC$ ши $AB=AC$.

Примул каз (дес. 1).

$AC=BC=13$. Нотэм прин H —пунктул де танженцэ а чиркумферинцей ынскрисе ын триунгюл ABC ку чиркумферинцей ынскрисе ын триунгюл ABC .

Атунч CH — ынэлцимя ши медиана триунгюлуй ABC .



база AB , r_1 – раза

Дин триунгюл дрептунгик AHC афлэм

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Атунч $S_{\Delta ABC} = AH \cdot HC = 5 \cdot 12 = 60$, ынсэ

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r_1 = 18r_1.$$

Дин егалитатя $18r_1 = 60$ афлэм $r_1 = \frac{10}{3}$.

Казул дой. (дес. 2)

Фие $AB = BC = 13$, CH — ынэлцимя триунгюлуй ABC , r_2 — раза чиркумферинцей ынскрисе ын ачест триунгь.

Атунч $BH = 5$, $AH = AB + BH = 13 + 5 = 18$.

Дин триунгюл дрептунгик ACH афлэм

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78, S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot r_2 = (13 + 3\sqrt{13})r_2.$$

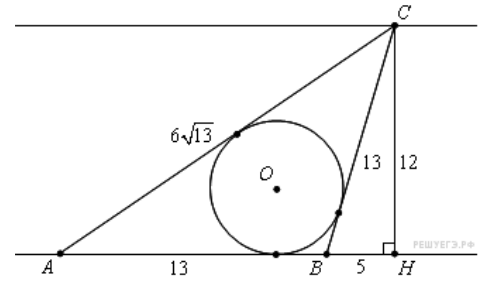
Дин егалитатя $(13 + 3\sqrt{13})r_2 = 78$ обцинем $r_2 = \frac{3(13 - 3\sqrt{13})}{2}$.

Прежэутэм казул трей.

Ын ачест каз $BC = AB$ дар еле формязэ унгь аскуцит. Атунч ынэлцимя CH се афлэ ын интериорул триунгюлуй ABC ши $AC = 4\sqrt{13}$.

Ын ачест каз раза ва фи егалэ ку $r_3 = \frac{2}{3}(13 - 2\sqrt{13})$.

Рэспунс: $\frac{10}{3}, \frac{3}{2}(13 - 3\sqrt{13}), \frac{2}{3}(13 - 2\sqrt{13})$.



сау

Ын паралелограмул $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Чиркумферинца ку центрл ын пунктул O есте тангентэ ку бисектоаря унгюлуй D ши доуэ латурь а паралелограмулуй каре формязэ унгюл аскуцит ал луй. Афлаць ария патрулатерулуй $ABOD$.

Резолваря.

Проблемей сатисфак доуэ чиркумферинце: уна е ынскрисэ ын триунгь екилатерал ку латура де 5 унитэць, яр а доуа ку 3 унитэць. Пентру триунгюл ку латура де 5 унитэць раза

$$r = \frac{5 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

чиркумферинцей

Ария патрулатерулуй $ABOD$ о афлэм прин сума ариилор триунгюрилор AOB ши AOD :

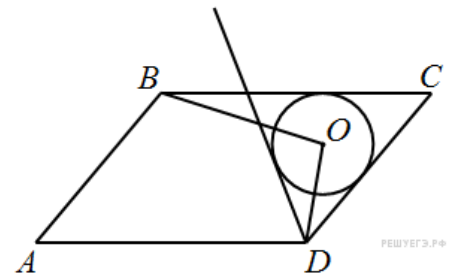
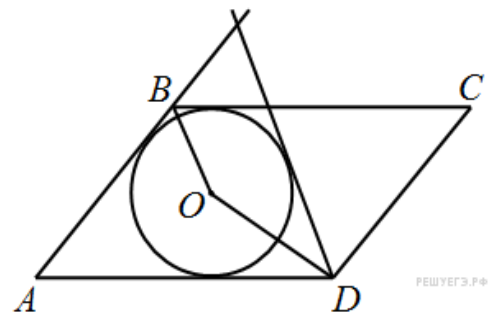
$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Пентру триунгюл ку латура де 3 унитэць раза

есте егалэ $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пентру а афла ария патрулатерулуй

$ABOD$, скэдэм дин ария паралелограмулуй арииле триунгюрилор BOC ши DOC :



$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

$$Рэспунс: \frac{10\sqrt{3}}{3}, \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

сау

Чиркумферинцеле ку разеле де 2 ши 3 унитэць ку чентреле ын пунктеле O_1 ши O_2 кореспунзэтор сынт тангенте ын пунктул A . Дряпта, че трече прин пунктул A , а доуа датэ интерсектязэ чиркумферинца май микэ ын пунктул B , яр пе чя май маре — ын пунктул C . Афлаць ария триунгюлуй BCO_2 дакэ $\angle ABO_1 = 30^\circ$

Резолваря.

Пунктеле O_1, O_2 ши A сынт ситуате пе о линии дряптэ. Деоарече триундюрيله BO_1A ши CO_2A сынт исосчеле, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30^\circ$, деунде

$$AB = 2O_1A \cos 30^\circ = 4 \cos 30^\circ, AC = 2O_2C \cos 30^\circ = 6 \cos 30^\circ.$$

Сынт посибиле доуэ казурь.

Примул каз: Чиркумферинцеле сынт тангенте интериор (дес. 1), атунч пунктул B есте ситуат ынтре пунктеле A ши C , деунде $BC = AC - AB = 2 \cos 30^\circ$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = \frac{3 \cos 30^\circ \sin 30^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Казул дой: Чиркумферинцеле сынт тангенте екстериор (дес. 2), атунч пунктул A есте ситуат ынтре пунктеле B ши C , деунде $BC = AC + AB = 10 \cos 30^\circ$.

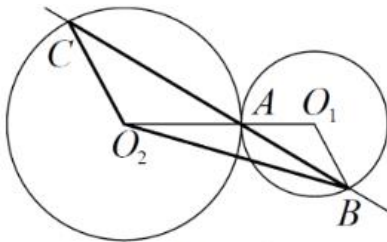


Рис. 1

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = \frac{15 \cos 30^\circ \sin 30^\circ}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

$$Рэспунс: \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ или } \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

сау

Доуэ чиркумферинце сынт тангенте екстериор ын пунктул K . Дряпта AB есте тангентэ ку прима чиркумферинцэ ын пунктул A , яр ку а доуа — ын пунктул B . Дряпта BK интерсектязэ прима чиркумферинцэ ын пунктул D , дряпта AK интерсектязэ чиркумферинца а доуа ын пунктул C .

а) Демонстраць, кэ дрептеле AD ши BC сынт паралеле.

б) афлаць ария триунгюлуй AKB , дакэ се штие, кэ разеле чиркумферинцелор сынт егале ку 4 ши 1.

Резолваря.

а) Нотэм чентреле чиркумферинцелор прин O_1 ши O_2 кореспунзэтор. Фие дряпта тангентэ комунэ, дусэ ла чиркумферинце прин пунктул K , интерсектязэ AB ын пунктул M . Дупэ проприетатя дрептелор тангенте, дусе динтр-ун пункт, $AM = KM$ ши $KM = BM$. Триунгюл AKB , медиана кэруя есте егалэ ку жумэтатя латурий, ла каре еа есте дусэ, есте дрептунгик. Унгюл ынскрис AKD есте дрепт, деоарече се сприжинэ пе диаметрул AD . Деч, $AD \perp AB$. Асемэнэтор обцинем, кэ $BC \perp AB$. Прин урмаре, дрептеле AD и BC сынт паралеле.

б) Фие пентру пречизие, прима чиркумферинцэ аре раза 4, яр а доуа – раза 1.

Триунгюриле BKC ши AKD сынт асемenea,

$$\frac{AD}{BC} = 4.$$

Фие $S_{BKC} = S$, атунч $S_{AKD} = 16S$.

Триунгюриле AKD ши AKB ау ынэлцимия комунэ,

$$\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC},$$

Ла фел, $S_{CKD} = 4S$.

Ария трапезулуй $ABCD$ есте егалэ ку $25S$.

Вом калкула ария трапезулуй $ABCD$. Коборым пе AD перпендикулара O_2H , каре есте егалэ ынэлцимией трапезулуй, ши афлэм лунжимя луй дин триунгюл

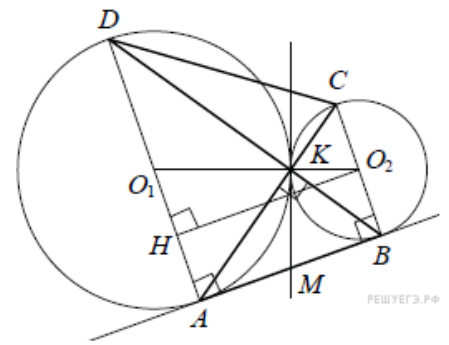
$$\text{дрептунгик } O_2HO_1: O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Атунч

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Деч, $25S = 20$, деунде $S = 0,8$ ши $S_{AKB} = 4S = 3,2$.

Рэспунс: 3,2.



С5 Пе дата де 31 дечембрие а анулуй 2013 Сергей а луат дин банкэ 9 930 000 рубле ын кредит суб 10% ануале. Скема де акитаре а кредитулуй есте урмэтоаря: пе дата де 31 дечембрие ын фиекаре ан урмэтор банка ый стабилеште прочентеле пе сума рэмасэ ындаторитэ (адикэ ый мэреште датория ку 10%), май апой Сергей трансферэ ын банкэ о сумэ анумитэ дин датория ануалэ. Каре ар требуи сэ фие сума акитэрий ануале, пентру ка Сергей сэ акопере датория прин трей суме ануале егалэ?

Резолваря.

Фие x — уна дин челе трей суме ануале. Атунч сума даторией дупэ плата ын примул ан ва фи: $9930000 \cdot 1,1 - x$. Дупэ ынTRODучеря платей а доуа сума даторией ва девени егалэ $(9930000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x$. Сума даторией дупэ а трея платэ: $((9930000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x$. Прин а трея платэ Сергей требуя сэ се актиезе ку датория, адикэ датория девине егалэ ку zero:

$$((9930000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x = 0 \Leftrightarrow 9930000 \cdot 1,1^3 - 1,1(1,1x + x) - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9930000 \cdot 1,1^3 - 3,31x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9930000 \cdot 1,1^3}{3,31} = 3993000 \text{ (рубле).}$$

Рэспунс: 3 993 000 рубле

сау

Фермерул а примит ун кредит дин банкэ суб ун процент анумит ануал. Песте ун ан фермерул а ынторс ын банкэ 3/4 пе контул акитэрий кредитулуй дин тоатэ сума, ку каре ел ера датор бэнчий ын ачел момент, яр ынкэ песте ун ан пе контул акитэрий тотале а кредитулуй ел а ынторс ын банкэ о сумэ, ку 21% май маре де мэримя кредитулуй примит. Каре есте прочентул ануал пе кредит ын банка датэ?

Резолваря.

Сэ адмитем кэ сума кредитулуй алкэтуеште S у.к., яр тарифул прочентуал ал кредитулуй $x\%$. Спре сфыршитул примулуй ан сума даторией фермерулуй кэтре банк ымпреунэ ку прочентеле кувените а алкэтуит $(1 + 0,01x)S$ у.к.

Дупэ ынтоарчеря ын банкэ $\frac{3}{4}$ пэрць дин тоатэ сума пе каре фермерул ера

датор бэнчий, датория луй пе анул виитор а девенит егалэ $\frac{1}{4}(1+0,01x)S$ у.к.

Сума датэ ын ал дойля ан а крескут ку ачеляшь проченте ши а девенит егалэ $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S$ у.к. Дупэ кондиция проблемей ачастэ сумэ есте егалэ ку $1,21S$ у.е.

Резолвэм екуация $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S = 1,21S$ пе мулцимя нумерелор позитиве.
 $(1+0,01x)^2 = 4 \cdot 1,21 \Leftrightarrow 1+0,01x = 2 \cdot 1,1 \Leftrightarrow 0,01x = 1,2 \Leftrightarrow x = 120$.

Рэспунс: 120.

сау

О банкэ а примит о сумэ де бань суб ун прочент анумит Песте ун ан ун сферт дин сума акумулятэ а фост скоасэ де пе конт. Банка а мэрит прочентул ануал ку 40%. Спре сфыршитул анулуй урмэтор сума акумулятэ а депэшит депозитул инициал де 1,44 орь. Каре есте прочентул ануал ноу?

Резолваря.

Сэ адмитем кэ сума депунерий алкэтуеште S у.к. суб $x\%$ ануале. Атунч ла ынчепутул анулуй дой сума а девенит егалэ $S(1+0,01x)$ у.к.

Дупэ скоатеря унуй сферт дин ачастэ сумэ пе конт а рэмас $\frac{3s}{4}(1+0,01x)$ у.к.

Дин моментул мэририй прочентулуй ануал ку 40% ла сфыршитул анулуй дой сума прекэутатэ а девенит егалэ

$$\frac{3s}{4}(1+0,01x) \cdot (1+(x+40) \cdot 0,01)$$
 у.к.

Дупэ кондиция проблемей ачастэ сумэ есте егалэ ку $1,44 \cdot S$ у.к.

Резолвэм екуация: $\frac{3s}{4}(1+0,01x) \cdot (1+(x+40) \cdot 0,01) = 1,44s$.

$$\frac{3s}{4}(1+0,01x) \cdot (1+(x+40) \cdot 0,01) = 1,44s \Leftrightarrow (1+0,01x) \cdot (1+(x+40) \cdot 0,01) = 1,92 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (100+x) \cdot (100+(x+40)) = 19200 \Leftrightarrow (100+x) \cdot (140+x) = 19200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 240x + 14000 - 19200 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 240x - 5200 = 0 \Leftrightarrow x = -120 \pm \sqrt{14400 + 5200} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 20; x_2 = -260$$

Рэдэчина негативэ $x_2 = -260$, ну сатисфаче кондиция проблемей.

Прочентеле ануале ной сынт $20 + 40 = 60\%$.

Рэспунс: 60.

сау

Оля дореште сэ ее ун кредит де 100 000 рубле. Акитаря кредитулуй сэ ефектуязэ о датэ ын ан прин суме егале (Се пря поате ын афарэ де улитма) дупэ стабилиря прочентелор. Тарифул е де 10 % ануале. Пе кыць ань миним поате Оля сэ ее ун кредит, пентру ка акитэриле ануале сэ ну дэпэшыскэ де 24000 рубле?

Резолваря.

Фие кэ сума кредитулуй есте егалэ ку S , яр прочентул ануал алкэтуеште $a\%$. Атунч ын ултима зи а фиекэруй ан сума рэмасэ а даторией сэ ынмулцеште ла коефициентул $b = 1 + 0,01a$. Алкэтуим табела акитэрилор.

Анул	Датория ын банкэ (руб.)	Сума рэмасэ дупэ акитаре (руб.)
0	100000	–
1	110000	86000
2	94600	70600
3	77660	53660
4	59026	35026
5	38528,6	14528,6
6	15981,46	0

Ынсямнэ кэ Оля се ва акита ку кредитул тимп де 6 ань.

Рэспунс: 6.

С6 Афлаць тоате валориле литерей a , ка пентру фиекаре дин еле графикул функций $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$ сэ интерсектезе акса абсчиселор ын май мулте де доуэ пункте диферите.

Резолваря.

Прекуэутэм функция $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$.

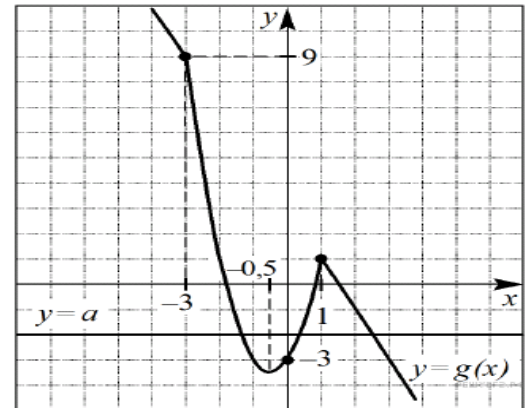
Графикул функцией $f(x)$ интерсектязэ акса абсчиселор ын трей сау май мулте пункте, дакэ екуация $g(x) = a$ аре май мулт де доуэ рэдэчинь диферите.

Дакэ $x \leq -3$ сау $x \geq 1$, атунч

$$|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3, \text{ ши } g(x) = -2x + 3.$$

Дакэ $-3 < x < 1$, атунч

$$|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3, \text{ ши } g(x) = 2x^2 + 2x - 3.$$



Графикул функцией $g(x)$ констэ дин доуэ семидрепте ши ун арк ал параболей. Пе десен се веде, кэ екуация $g(x) = a$ аре май мулт де доуэ рэдэчинь нумай дакэ $g\left(-\frac{1}{2}\right) < a < g(1)$. Валориле кореспунзэтоаре а функцией g сынт: $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -3,5$; $g(1) = 1$.

Рэспунс: $-3,5 < a < 1$.

сау

Афлаць тоате валориле литерей a , ка пентру фиекаре дин еле екуация

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 1$$

пе интервалул $(0, +\infty)$ сэ айбэ май мулт де доуэ рэдэчинь.

Резолваря.

Прекуэутэм функцииле $f(x) = ax - 1$ ши $g(x) = \left| \frac{5}{x} - 3 \right|$. Черчетэм екуация $f(x) = g(x)$ пе интервалул $(0, +\infty)$.

Пентру $a \leq 0$ тоате валориле функцией $f(x)$ пе интервалул $(0, +\infty)$ сынт негативе, яр тоате валориле функцией $g(x)$ — ненегативе, деачея пентру $a \leq 0$ екуация $f(x) = g(x)$ н-аре солуций пе интервалул $(0, +\infty)$.

Пентру $a > 0$ функция $f(x)$ есте крескэтоаре. Функция $g(x)$ есте дескрескэтоаре пе интервалул $\left(0, \frac{5}{3}\right]$, ши деч екуация $f(x) = g(x)$ аре ну май мулт де о сингурэ солуцие пе $\left(0, \frac{5}{3}\right]$, прекум солуция ва екзистэ атунач ши нумай атунач, кынд $f\left(\frac{5}{3}\right) \geq g\left(\frac{5}{3}\right)$, де унде обцинем $a \cdot \frac{5}{3} - 1 \geq 0$, адикэ $a \geq \frac{3}{5}$.

Пе интервалул $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ екуация $f(x) = g(x)$ обцине форма $ax - 1 = 3 - \frac{5}{x}$. Ачэстэ екуацие се редуче ла екуация $ax^2 - 4x + 5 = 0$. Вом сокоти, кэ $a > 0$, деоарече казул $a \leq 0$ а фост прекуэуат пречедент. Дискриминантул екуацией патрате $D = 16 - 20a$, деачея пентру $a > \frac{4}{5}$ ачэстэ екуацие н-аре рэдэчинь, пентру $a = \frac{4}{5}$ екуация аре о сингурэ рэдэчинэ, егалэ ку $\frac{5}{2}$, пентру $0 < a < \frac{4}{5}$ екуация аре доуэ рэдэчинь.

Дакэ екуация аре доуэ рэдэчинь x_1 ши x_2 , адикэ $0 < a < \frac{4}{5}$, атунач рэдэчина май маре $x_2 = \frac{4 + \sqrt{D}}{2a} > \frac{4}{2a} > 2 > \frac{5}{3}$, деачея еа апарцине интервалулуй $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

Рэдэчина май микэ x_1 апарцине интервалулуй $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ атунач ши нумай атунач, кынд $a\left(x_1 - \frac{5}{3}\right)\left(x_2 - \frac{5}{3}\right) = a \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{5}{3} + 5 = \frac{25a - 15}{9} > 0$, адикэ $a > \frac{3}{5}$.

Ын аша фел, екуация инициалэ $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 1$ пре урмэторул нумэр де рэдэчинь пе интервалул $(0, +\infty)$:

- н-аре рэдэчинь, дакэ $a \leq 0$;
- о рэдэчинэ дакэ $0 < a < \frac{3}{5}$ ши $a > \frac{4}{5}$;
- доуэ рэдэчинь дакэ $a = \frac{3}{5}$ ши $a = \frac{4}{5}$;
- трей рэдэчинь дакэ $\frac{3}{5} < a < \frac{4}{5}$.

Рэспунс: $\frac{3}{5} < a < \frac{4}{5}$.

сау

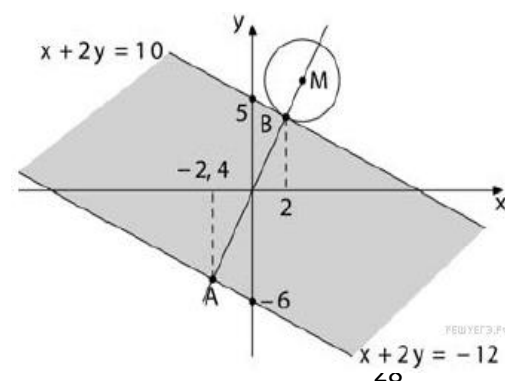
Афлаць тоате валориле параметрулуй a , ка пентру фиекаре дин еле системул дат се айбэ о сингурэ солуцие.

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

Резолваря.

Трансформэм системул:

$$\begin{cases} -12 \leq x + 2y \leq 10, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a. \end{cases}$$



Инэгалитатя $-12 \leq x + 2y \leq 10$ презентэ пе планул де координате о зонэ лимитатэ де дрептеле паралеле: $x + 2y = 10$ ши $x + 2y = -12$.

Дакэ $a < -2$, системул н-аре солуций деорече партя дряптэ а екуацией девине негативэ. Дакэ $a = -2$, екуация примеште форма: $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 0$ дрепт солуция кэрэя есте ун сингур пункт $(-2; -4)$, координателе кэруя сатисфак инэгалитатя: $|-2 - 8 + 1| = 9 < 11$. Деч, кынд $a = -2$ системул аре о сингурэ солуцие.

Прекуэутэм казул $a > -2$. Атунч екуация $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2+a$ детерминэ о чиркумферинцэ ку раза $\sqrt{2+a}$. Центрул чиркумферинцей $M(a; 2a)$ есте ситуат пе дряпта $y=2x$, каре есте перпендикулярэ границелор зоней дате ши ле интерсектязэ ын пунктле $A(-2, 4; -4, 8)$ ши $B(2; 4)$. Система аре о сингурэ солуцие, нумай дакэ чиркумферинца ва фи танжентэ ла границеле зоней екстериор ын пунктеле A сау B . Дакэ пунктул де танженцэ ва фи A , атунч $a < -2, 4$, чэя че есте импосибил. Чиркумферинца есте танжентэ ла зонэ ын пунктул B , нумай дакэ $a > 2$ ши $MB = r$. Обцинем:

$$(a-2)^2 + (2a-4)^2 = 2+a \Leftrightarrow 5a^2 - 21a + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ a = 1, 2. \end{cases}$$

Кондицией $a > 2$ сатисфаче нумай рэдэчина $a = 3$.

Рэспунс: $-2; 3$.

сау

Се ште, кэ валоаря параметрулуй a есте астфелэ, кэ системул де екуацией

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2 y^2) + 1 \end{cases}$$

Аре уника солуцие. Афлаць ачастэ валоаре а параметрулуй a ши резолваць системул апликынд ачастэ валоаре.

Резолваря.

Дин прима екуацие а системулуй обцинем $2^{\ln y} = 4^{|x|} \Leftrightarrow y = e^{2|x|}$.

Обсервэм, кэ дакэ перека $(x; y)$ — есте солуция системулуй, атунч перека $(-x; y)$ — ла фел ый солуция системулуй. Деорече системул аре о сингурэ солуцие, деч дрепт солуция луй поате фи нумай перека $(0; y)$. астфел, $x = 0$ ши дин а доуа екуацие обцинем:

$$\log_2(2a^2) = \log_2 1 + 1 \Leftrightarrow \log_2(2a^2) = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ a = -1. \end{cases}$$

Контролэм, дакэ е реал кэ системул пентру валориле обцинуте а параметрулуй a аре солуцие уника.

1. Дакэ $a = 1$, атунч ын реалитате системул аре о уника солуцие:

$$\log_2(x^4 y^2 + 2) = \log_2(1 - x^2 y^2) + 1 \Leftrightarrow x^4 y^2 + 2 = 2 - 2x^2 y^2 \Leftrightarrow y^2(x^4 + 2x^2) = 0 \Leftrightarrow_{y>0} x = 0$$

Атунч $y = e^0 = 1$.

2. Дакэ $a = -1$, атунч системул аре трей солуций:

$$\log_2(x^4 y^2 + 2) = \log_2(1 + x^2 y^2) + 1 \Leftrightarrow x^4 y^2 + 2 = 2 + 2x^2 y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^4 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow_{y>0} x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Фиекэрей валорь гэсите а луй x ый кореспунде о сингурэ валоаре $y = e^{2|x|}$
Рэспунс: системул аре уника солуцие (0; 1) кынд $a = 1$.

С7 Крейонул рошу костэ 17 рубле, албастру — 13 рубле. Е нечесар де кумпэрат крейоане авынд 495 рубле ши респектынд о кондицие суплиментарэ: нумэрул крейоанелор албастре ну требуе сэ депэшыскэ нумэрул крейоанелор роший май мулт декыт ку 5.

а) Се поате оаре де кумпэрат 32 де крейоане ын аша кондиций?

б) Се поате оаре де кумпэрат 35 крейоане ын аша кондиций?

в) Каре есте чел май маре нумэр де крейоане посибил де а кумпэра ын аша кондиций?

Резолваря.

а) Се поате. Де екземплу, де прокурат 14 крейоане роший ши 18 албастре: $14 \cdot 17 + 18 \cdot 13 = 472$ (руб.).

б) Май ефтин де тот вор коста 35 де крейоане, дакэ се кумпэрэ чел май маре нумэр посибил де крейоане албастре ши чел май мик нумэр посибил де крейоане роший, адикэ, дакэ се кумпэрэ 15 крейоане роший ши 20 крейоане албастре, деоарече, дакэ крейоане роший май пуцине де 15, атунч албастре вор фи май мулт де 20, ши ын аша каз диференца динтре нумэрул де крейоане роший ши албастре е май маре де 5. Ынсэ атунч костул кумпэрэтурий ва фи $15 \cdot 17 + 20 \cdot 13 = 515$ (руб.), чея че е май мулт де 495 руб, де каре диспунем.

в) Фие кэ n ши m —экспримэ нумэрул крейоанелор албастре ши роший кореспунзэтор. Атунч

$$\begin{cases} 17m + 13n \leq 495, \\ |m - n| \leq 5, \\ m, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Фие $s = n + m$, атунч

$$\begin{cases} 4m + 13s \leq 495, \\ -5 \leq 2m - s \leq 5, \\ m = 0, 1, \dots, s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{495 - 13s}{4}, \\ \frac{s - 5}{2} \leq m \leq \frac{s + 5}{2}, \\ m = 0, 1, \dots, s, \end{cases}$$

$$\frac{s - 5}{2} \leq \frac{495 - 13s}{4}, \text{ деунде } s \leq 33\frac{2}{3}.$$

Ын резултат обцинем: $\frac{s - 5}{2} \leq \frac{495 - 13s}{4}$, деунде $s \leq 33\frac{2}{3}$.
 Се поате прокура ну май мулт де 33 крейоане. Не рэмыне сэ верификэм, есте оаре посибил казул, кынд $s = 33$. Луынд $m = 14, n = 19$ примим $14 \cdot 17 + 19 \cdot 13 = 485 < 495$.

Ынсямнэ, кэ чел май маре нумэр посибил де крейоане прокурате 33.

Рэспунс: а) да; б) ну; в) 33.

сау

Динтр-о групэ де елевь фиекаре ау плекат каре ла чинема, каре ла театру, фиинд посибил кэ чинева дин ей путяу плека ши ла чинема, ши ла театру. Е куноскут, кэ ла театру ау фост ну май мулць бэець декыт

дин нумэрул женерал ал елевилор группей, че ау реквентат театру, яр ла чинема ау фост ну май мулць бэець декыт $\frac{2}{5}$ дин нумэрул женерал ал елевилор группей, че ау реквентат чинематографул.

а) Путяу оаре фи ын группэ 10 бэець, дакэ суплиментар есте куноскут, кэ ын группэ ау фост де тот 20 елевь?

б) Каре ар путя фи чел май маре нумэр де бэець ын группэ, дакэ суплиментар се штие, кэ де тот ын группэ ау фост 20 елевь?

в) Каре чя май микэ парте дин нумэрул тотал де елевь ал группей путяу окупа фетеле фэрэ кондиция суплиментарэ а пунктелор а) ши б)?

Резолваря.

а) Дакэ група е алкэтуите дин 4 бэець, каре фреквентязэ нумай театрул, б бэець фреквентязэ нумай чинематографул ши 10 фете, фреквентынд ши театрул ши чинематографул, атунч кондиция проблемей есте ындеплинитэ. Ынсямнэ, кэ ын группа алкэтуитэ дин 20 елевь путяу фи 10 бэець.

б) Сэ преспунем кэ бэець ау фост 11 сау май мулць. Атунч фете ау фост 9 сау май пуцине. Ла театру ау фост ну май мулць де 4 бэець, деоарече, дакэ ар фи фост 5 бэець сау май мулць, атунч нумэрул бэецилор ын театру ар фи

фост ну май мик де $\frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$, чя че есте май маре $\frac{4}{13}$. Аналог, ла

чинематограф ау фост ну май мулць де 6 бэець деоарече $\frac{7}{7+9} = \frac{7}{16} > \frac{2}{5}$, ынсэ атунч мэкар 1 бэят н-а фост нич ла театру нич ла чинематограф, чя че контразиче кондицией.

Ын пунктул пречедент с-а демонстрат, кэ ын группа дин 20 елевь путяу фи 10 бэець. Ынсямнэ, кэ чел май маре нумэр де бэець ын группэ е де 10.

в) Сэ преспунем, кэ ун бэят оарекаре а плекат ши ла театр ши ла чинематограф. Дакэ ын локул луй ын группэ ар фи фост 2 бэець, унул динтре каре а асистат нумай театру, яр алтул нумай чинема, атунч нумэрул бэецилор плекаць ши ла театру ши ла чинема ар фи рэмас ачелаш, яр нумэрул женерал де фете ар фи девенит май мик. Ынсямнэ кэ пентру а стабили нумэрул чел май мик де фете ын группэ, се поате де сокотит кэ фиекаре бэят а фост сау нумай ла театру, сау нумай ла чинема.

Фие кэ ын группэ сынт m_1 бэець, каре ау фост ла театру, m_2 бэець, каре ау фост ла чинема ши d фете. Апречием партя фетелор ын группа датэ. Сэ преспунем, кэ тоате фетеле ау фост ши ла театру ши ла чинема, деоарече нумэрул лор ын группэ прин ачаста ну се ва скимба, яр нумэрул челора каре ау фост ши ла театру ши ла чинема ну се ва микшора

Дин кондицие:

$$\frac{m_1}{m_1+d} \leq \frac{4}{13}, \frac{m_2}{m_2+d} \leq \frac{2}{5}, \text{ ынсямнэ кэ, } \frac{m_1}{d} \leq \frac{4}{9}, \frac{m_2}{d} \leq \frac{2}{3}. \text{ Атунч } \frac{m_1+m_2}{d} \leq \frac{10}{9},$$

деунде афлэм партя фетелор ын группэ: $\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \geq \frac{1}{\frac{10}{9}+1} = \frac{9}{19}.$

Дакэ ын группэ сынт 4 бэець, каре ау фост нумай ла театру, 6 бэець, каре ау фост нумай ла чинема, ши 9 фете, каре ау фост ши ла театру ши ла чинема, атунч кондиция проблемей е ындеплинитэ, яр партя фетелор ын группэ есте $\frac{9}{19}$.

Рэспунс: а) да; б) 10; в) $\frac{9}{19}$.

сау

Афлаць тоате перекиле (x;y) де нумере ынтрежъ, каре сатисфак системулуй де инегалитэць:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Резолваря.

Сепарынд патрателе комплете, обцинем:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15, \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Дин инегалитэциле системулуй резултэ:

$$\begin{cases} (x-9)^2 < 15, \\ (x-16)^2 < 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \leq x \leq 12, \\ 12 \leq x \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12.$$

Ынлокуинд $x = 12$ ын систем, обцинем:

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6, \\ (y+6)^2 < 5, \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq y+10 \leq 2, \\ -2 \leq y+6 \leq 2, \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 \leq y \leq -8, \\ -8 \leq y \leq -4, \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow y = -8.$$

Рэспунс: (12; -8).